ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

28 січня – 29 січня 2012 року, м.Львів

7 клас

1. У продавця є по 5 гирьок вагою 252 г, 380 г і 693 г. Чи можна за одне зважування на шалькових терезах без поділок відважити 2012 г сипучого товару? Відповідь обгрунтувати.

2. Знайдіть всі такі цілі числа x і прості числа p, для яких виконується рівність

$$x^4 - 2012 \cdot x + p = 0.$$

3. Сума декількох додатних чисел дорівнює 1. Чи може сума їх квадратів бути меншою за $\dfrac{1}{2012}$?

4. Для кожного значення a розв'язати рівняння

$$2011 \cdot |x - 2012| + a \cdot |2012 - x| = 1.$$

5. Під час свята міста між собою змагались дві команди по 1006 учасників у кожній — команда гостей міста і команда господарів. На команду переможницю очікував приз у вигляді 1006 більших шматків великого торта, розрізаного на 2011 шматків, серед яких нема двох з однаковою вагою. Проте змагання закінчилось внічию. Чи можна один з шматків торта розділити на два так, щоб з утворених 2012 шматків можна було утворити два однакових за вагою призи по 1006 шматків торта у кожному? Відповідь обгрунтувати.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

28 січня – 29 січня 2012 року, м.Львів

8 клас

1. Сума декількох додатних чисел дорівнює 2012. Чи може сума їх квадратів бути меншою за $\dfrac{1}{2012}$?

2. У чотирикутнику $ABCD$ ($AD \parallel BC$) на основі відзначили точку L, а на основі AD точки $K \neq M$ так, що підряд йдуть A, K, M, D. Після цього з чотирикутника вирізали трикутники BKL, CML. Обчислити площу фігури, що залишилась, якщо $AD = 503$, а відстань між AD і BC дорівнює $h = 8$.

3. Знайти всі натуральні числа A, чотири останні цифри яких $A = \ldots 2012$, а сума квадратів його цифр: а) не більша за A ; б) не менша за A.

4. Для кожного значення a розв'язати рівняння

$$2011 \cdot |x - 2012| + a \cdot |2012 - x| = 1.$$

5. Для яких натуральних значень n виконуються нерівності

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{2011} + \sqrt{2012} \leq \sqrt{n+1}.$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

28 січня – 29 січня 2012 року, м.Львів

9 клас

1. Знайти всі дійсні значення x, для яких виконується нерівність

$$|2x - 2012| < |x - 1| + |x - 2011|.$$

2. Квадратний тричлен $f(x) = x^2 + bx + c$ має два дійсні корені, відстань між якими більша за 2011. Довести, що рівняння

$$f(x + 1) + f(x + 2012) = 0$$

має два різних дійсних корені.

3. Знайти всі такі натуральні числа n, що

$$\sqrt{2011} \leq \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq \sqrt{2012}.$$

4. В залежності від параметра a розв'язати рівняння

$$\frac{(a^2 + 2011)x + 1}{x - 1} = \frac{a(1 + 2012x)}{x - 1}.$$

5. З точки P, розташованої зовні кута $\measuredangle A$, проведено до цього кута дві січні прямі. Одна з цих прямих відтинає на сторонах кута два однакових відрізки $AB = AC$, а інша перетинає ці відрізки у точках D, M, відповідно. Довести, що $\dfrac{BD}{CM} = \dfrac{PD}{PM}$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

28 січня – 29 січня 2012 року, м.Львів

10 клас

1. Для додатних дійсних x, y, z доведіть нерівність

$$\frac{x^2+yz}{x(y+z)}+\frac{y^2+xz}{y(x+z)}+\frac{z^2+xy}{z(x+y)}\geq 3.$$

2. Бісектриси AA_1 і BB_1 трикутника ABC діляться точкою перетину O на пропорційні відрізки $AO\colon OA_1 = BO\colon OB_1$. Довести, що — ΔABC рівнобедрений.

3. Всі цілі числа довільно розбили на дві групи. Довести, що принаймні в одній з цих груп існують три числа, які утворюють арифметичну прогресію.

4. Знайти всі пари цілих чисел (x, y) таких, що

$$(x^2+3x+3)^2+(y^2-y+1)^2=2012.$$

Відповідь обгрунтувати.

5. Знайти всі трійки чисел x_1, x_2, x_3 таких, що

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2012, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1, \\ x_1x_2x_3=-2012. \end{cases}$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

28 січня – 29 січня 2012 року, м.Львів

11 клас

1. Знайти всі пари цілих чисел (x, y) таких, що

$$(x^2 + 3x + 5)^2 + (y^2 - 3y + 5)^2 = 2012.$$

Відповідь обгрунтувати.

2. В основі чотирикутної піраміди лежить ромб з кутом 60° при вершині A, а ії бічне ребро, проведене з цієї вершини, дорівнює стороні ромба. Довести, що з решти бічних ребер можна побудувати прямокутний трикутник.

3. Яке число більше 48^{2012} чи $18 \cdot 3^{7043}$? Відповідь обгрунтувати.

4. Розв'язати нерівність

$$\log_{4-x^2}(3 - x) \leq \log_{4-x^2}(x^2 + 3x - 2).$$

5. Чи існує зростаюча арифметична прогресія , сума членів якої дорівнює 2012, а сума квадратів її членів менша за $\dfrac{1}{2012}$? Відповідь обгрунтувати.

6. Розв'язати нерівність

$$4 \sin 3x - 6 \sin 2x \cdot \cos x + 4 \sin x - \cos 2x - 1 \geq 0.$$